

# Mathematik 1

für Maschinenbau, Material- und Fertigungstechnologie

Dipl.-Math. Rupert J. Hartung  
Fachhochschule Gießen-Friedberg  
WS 2005 / 06

## Lösungen der Übung 8

**Wichtige Vorbemerkung:** Die vorgestellten Lösungen müssen nicht die einzig möglichen sein. Sie bilden nur ein Beispiel für einen richtigen Lösungsweg. Die Lösungen dieser Übungsserie bestehen durchweg aus Skizzen, d.h. sie enthalten nur die wichtigsten Zwischenergebnisse.

**Aufgabe 4.** Betrachte die Funktion

$$e(y) := y - \sin^2 y.$$

Wir suchen zunächst Extrema der Funktion  $e(y)$ . Ableitungen:

$$\begin{aligned} e'(y) &= 1 - 2(\sin y)(\cos y), \\ e''(y) &= 2(\cos^2 y - \sin^2 y). \end{aligned}$$

Kritische Stellen:

$$e'(y) = 0 \iff (\sin y)(\cos y) = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt  $\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y}$ ; es folgt

$$e'(y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \pm(\cos y)\sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

Durch nach der Wurzel Auflösen und Quadrieren folgt

$$\cos^2 y - \cos^4 y = \frac{1}{4}.$$

Also erfüllt  $u := \cos^2 y$  die quadratische Gleichung  $u^2 - u + \frac{1}{4}$ , die die eindeutige Lösung  $u = \frac{1}{2}$  hat. Wir erhalten also

$$u = \cos^2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für diese  $y$  kann man auch den Sinus-Wert (bis auf Vorzeichen) aus Pythagoras berechnen:

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Vorsicht! Die  $\pm$ -Zeichen müssen nicht überall dieselbe Bedeutung haben. Daher nun ganz ausführlich:)

Wir haben erhalten, dass aus  $e'(y)$  folgt, dass

$$\cos y = \frac{E_1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin y = \frac{E_2}{\sqrt{2}}$$

für  $E_1, E_2 \in \{1, -1\}$ . Wir testen nun diese Kandidaten in (1):

$$\frac{1}{2} \stackrel{!}{=} (\cos y)(\sin y) = \frac{E_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{E_2}{\sqrt{2}} = \frac{E_1 E_2}{2}.$$

Diese Gleichung gilt also genau dann, wenn  $E_1 E_2 = 1$  ist, d.h. wenn die Vorzeichen von Kosinus- und Sinuswert gleich sind.

Zusammenfassend haben wir bis jetzt erfahren:  $e'(y) = 0$  gilt genau dann, wenn

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \\ \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \\ \sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}.$$

Das erste System hat im Intervall  $y \in [0, 2\pi]$  die eindeutige Lösung  $y = \frac{\pi}{4}$ , das zweite hat auf  $y \in [0, 2\pi]$  die eindeutige Lösung  $y = \pi + \frac{\pi}{4}$ .

Aus der Periodizität von Sinus und Kosinus erhalten wir also auf  $y \in [0, \infty[$  genau die folgenden kritischen Stellen:

$$e'(y) = 0 \iff y = n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0.$$

---

Nun ist wie üblich zu prüfen, ob und welche Extremwerte vorliegen. Einsetzen in die zweite Ableitung:

$$e''(n\pi + \frac{\pi}{4}) = 2(\cos^2(n\pi + \frac{\pi}{4}) - \sin^2(n\pi + \frac{\pi}{4})) = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0$$

(Sinus- und Kosinuswerte wurden oben ausgerechnet!). Die zweite Ableitung liefert also keine Information über Extrema; daher berechnen wir die dritte Ableitung von  $e(y)$ :

$$e'''(y) = -8(\cos y)(\sin y).$$

Einsetzen der kritischen Stellen in die dritte Ableitung:

$$e'''(n\pi + \frac{\pi}{4}) = -8\frac{1}{2} = -4 \neq 0.$$

Es handelt sich also nicht um Extrema (sondern um Wendepunkte).

---

Aus dem bisherigen erfahren wir, dass  $e(y)$  keine Extrema *im Innern* seines Definitionsbereiches hat (der Definitionsbereich ist  $[0, \infty[$ , also ist dessen Inneres das Intervall  $]0, \infty[$ ).

Die Grenze des Definitionsbereiches, die Null, ist automatisch ein lokales Extremum. Die Art kann man an der ersten Ableitung ablesen:

$$e'(0) = 1 - 2(\sin 0)(\cos 0) = 1 > 0,$$

also ist  $e(y)$  in einem kleinen Bereich um die Null steigend, also liegt bei Null ein lokales Minimum vor.

Dieses Minimum muss dann aber auch global sein: Denn um  $y = 0$  ist  $e(y)$  zunächst steigend. Wenn  $e(y)$  irgendwo wieder auf 0 oder einen kleineren Wert

fallen sollte, müsste dazwischen ein Maximum liegen, was wir aber oben ausgeschlossen haben. Also liegt bei  $y = 0$  ein globales Minimum vor.

---

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist (s. §6), sind Maxima von  $d(y)$  auch Maxima von  $e(y)$  und umgekehrt, ebenso für Minima. Wir wissen nun also, dass  $d(y)$  bei 0 ein globales Minimum und sonst keine weiteren Extrema hat.

---

Es war nun noch das Verhalten von  $e(y)$  bei  $y \rightarrow \infty$  zu bestimmen. Beachte dazu:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} y &= \infty, \\ \sin^2 y &\text{ ist beschränkt (nämlich } 0 \leq \sin^2 y \leq 1), \\ \text{also } \lim_{y \rightarrow \infty} (y - \sin^2 y) &= \infty. \end{aligned}$$

Schließlich

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{y - \sin^2 y} = \lim_{u \rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} (y - \sin^2 y)} \sqrt{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{u} = \infty.$$

Ergebnis:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e(y) = \infty.$$

---

**Kommentar:** Bei dieser Aufgabe kamen sehr verschieden Inhalte zur Anwendung. Zur besseren Übersicht sind die besondereren hier noch einmal zusammengestellt (in der Reihenfolge ihrer Wichtigkeit):

- (i) Man beachte die Kriterien, mit denen man ein *globales* Extremum nachweisen kann.
- (ii) Auflösen von Gleichungen mit  $\sin$  und  $\cos$ . Als wichtiger Schritt ist herauszustellen, dass man mit dem Satz von Pythagoras von den zwei Winkel-funktionen  $\sin$  und  $\cos$  eine loswerden kann (auf Kosten eines  $\pm$ -Zeichens).
- (iii) Wenn  $f(z)$  eine streng monotone Funktion ist, dann sind die Maxima und Minima von  $f(g(y))$  genau an denselben Stellen zu finden wie die von  $g(y)$ . Hier:  $f(z) = \sqrt{z}$ . Dieser Trick erleichtert die Arbeit mit den Ableitung, ist aber nicht unbedingt nötig.
- (iv) Wenn  $f'(x) = 0 = f''(x)$ ;  $f'''(x) \neq 0$ , dann hat  $f$  bei  $x$  kein Extremum (betrachte z.B.  $f(x) = x^3$ ,  $x = 0$ ). Es hat dort aber einen Wendepunkt, denn Wendepunkte erkennt man an der Bedingung  $f''(x) = 0$ ,  $f'''(x) \neq 0$ .

**Aufgabe 5.** Es sind die Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= t_{11}\vec{v}_1 + t_{21}\vec{v}_2 + t_{31}\vec{v}_3 \\ \vec{w}_2 &= t_{12}\vec{v}_1 + t_{22}\vec{v}_2 + t_{32}\vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 &= t_{13}\vec{v}_1 + t_{23}\vec{v}_2 + t_{33}\vec{v}_3\end{aligned}$$

zu lösen.

Für die erste dieser Gleichungen:

$$\vec{w}_1 = t_{11}\vec{v}_1 + t_{21}\vec{v}_2 + t_{31}\vec{v}_3 \iff \left\{ \begin{array}{l} t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} = -3, \\ -2t_{11} + \quad \quad \quad 4t_{31} = 2, \\ t_{11} + t_{21} - t_{31} = 9, \end{array} \right\}$$

und diese drei Variable kommen in den anderen Systemen nicht vor. Wir lösen auf:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} t_{11} + 2t_{21} + 3t_{31} = -3, \\ -2t_{11} + \quad \quad \quad 4t_{31} = 2, \\ t_{11} + t_{21} - t_{31} = 9, \end{array} \right\} \iff \\ & \left\{ \begin{array}{l} -t_{11} + \quad \quad \quad 5t_{31} = -21 \quad (I - 2III), \\ -2t_{11} + \quad \quad \quad 4t_{31} = 2, \\ t_{11} + t_{21} - t_{31} = 9, \end{array} \right\} \iff \\ & \left\{ \begin{array}{l} \quad \quad \quad 6t_{31} = -44 \quad (2I - II), \\ -2t_{11} + \quad \quad \quad 4t_{31} = 2, \\ t_{11} + t_{21} - t_{31} = 9, \end{array} \right\} \iff \\ & \left\{ \begin{array}{l} t_{31} = -\frac{22}{3}, \\ t_{11} = \frac{2 \cdot 4 \cdot (-\frac{22}{3})}{-2} = -\frac{47}{3}, \\ t_{21} = 9 - \frac{-22}{3} + \frac{47}{3} = \frac{52}{3}. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ähnlich löst man auch die anderen Systeme und erhält die Matrix

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{3} & -8 & \frac{52}{3} \\ \frac{52}{3} & 9 & -\frac{50}{3} \\ -\frac{22}{3} & -4 & \frac{23}{3} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6.**

(a) Die Funktion  $f(x) = x^3 + u$  ist stetig, da sie ein Polynom ist (s. (7a.2d)). Auch der Absolutbetrag  $abs(y) = |y|$  ist stetig (s. (7a.2e)). Damit ist auch  $g(x)$  stetig, da sie aus zwei stetigen Funktionen zusammengesetzt ist (s. (7a.2g)).

(b) Man muss für  $g$  drei Bereiche unterscheiden:

- Auf  $] -\sqrt[3]{u}, \infty[$  gilt  $g(x) = x^3 + u$ ; damit ist  $g$  differenzierbar, und es ist  $g'(x) = 3x^2$ .
- Auf  $] -\infty, -\sqrt[3]{u}[$  gilt  $g(x) = -(x^3 + u)$ ; damit ist  $g$  differenzierbar, und es ist  $g'(x) = -3x^2$ .

- An der Stelle  $x_0 = -\sqrt[3]{u}$  ist  $g$  nicht differenzierbar. Es gilt  $g(x_0) = 0$ .

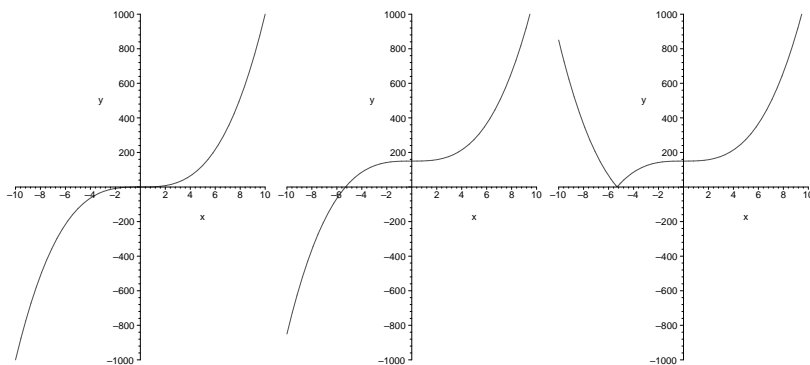
Falls im ersten oder zweiten Bereich Extrema vorkommen, muss dort die Ableitung verschwinden.

Im ersten Bereich müsste also gelten  $3x^2 = 0$ ; und diese Gleichung hat die eindeutige Lösung  $x = 0$ . Es gilt aber  $g''(x) = 6x$  und  $g'''(x) = 6$ , also  $g''(0) = 0$  und  $g'''(0) = 6 \neq 0$ , also kann dort kein Extremum vorliegen.

Im ersten Bereich müsste gelten  $-3x^2 = 0$ ; einzige mögliche Lösung wiederum  $x = 0$ . Wie eben aber ist diese Stelle kein Extremum.

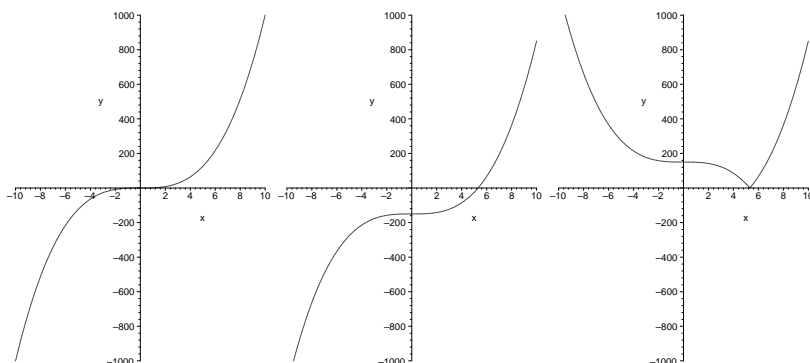
Wir folgern:  $g$  hat kein Extremum im ersten und zweiten Bereich. Es bleibt also nur der dritte Bereich, d.h. der Punkt  $x_0 = -\sqrt[3]{u}$ , zu untersuchen. Da aber  $g(x_0) = 0$  ist und  $g(x) \geq 0$  für alle  $x$  gilt, liegt in  $x = x_0 = -\sqrt[3]{u}$  ein globales Minimum vor.

**Kommentar:** Zur Veranschaulichung ein paar Zeichnungen. Für positives  $u$ :

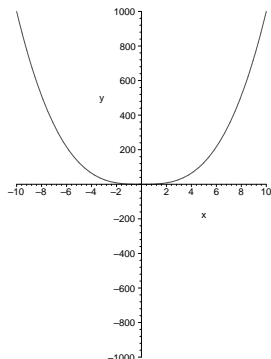


Die Abbildungen zeigen die Graphen von  $x^3$ ,  $x^3 + u$  und  $|x^3 + u|$ . Addition entspricht Verschiebung nach oben; der Betrag bewirkt, dass der negative Ast an der  $x$ -Achse gespiegelt wird. Man sieht deutlich, dass das Minimum nicht an der Stelle mit waagerechter Tangente liegt.

Für negatives  $u$ :



Für den Fall  $u = 0$  hat die Funktion  $g(x)$  den Graphen



### Aufgabe 7.

- (a) Besprochen.  
 (b) Es ist  $x = \sin(\omega t)$ . Wir müssen nun die anderen Komponenten von  $F$  nach  $x$  auflösen.

Laut Additionstheoremen:

$$\begin{aligned} \sin(3\omega t) = \sin(2\omega t + \omega t) &= \sin(2\omega t) \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(2\omega t) \\ &= 2 \sin(\omega t) \cos^2(\omega t) + 2 \sin(\omega t) \cos^2(\omega t) - \sin^3(\omega t) \\ &= 4 \sin(\omega t) \cos^2(\omega t) - \sin^3(\omega t). \end{aligned}$$

Wir haben aber  $x = \sin(\omega t)$ , also  $x^2 = \sin^2(\omega t)$  und damit auch  $1 - x^2 = \cos^2(\omega t)$ . Mit diesen Ersetzungen vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\sin(3\omega t) = 4x(1 - x^2) - x^3;$$

und hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} y = r \sin^2(3\omega t) &= r \left( 4x(1 - x^2) - x^3 \right)^2 \\ &= r (16x^2(1 - 2x^2 + x^4) - 8x^4(1 - x^2) + x^6) \\ &= r x^2 (25x^4 - 40x^2 + 16). \end{aligned}$$

Ebenso verfahren wir mit der  $z$ -Koordinate:

$$\cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = (1 - x^2) - x^2,$$

folglich

$$z = r \cos^2(2\omega t) = r (1 - 2x^2)^2 = r(4x^4 - 4x^2 + 1).$$

Die explizite Form der Kurve lautet also

$$F_E(x) = \begin{pmatrix} x \\ r x^2 (25x^4 - 40x^2 + 16) \\ r (2x^2 - 1)^2 \end{pmatrix}.$$

**Kommentar:** Die gegebene Gestalt der Kurve als Funktion von  $t$  kann man als Parametrisierung durch die Zeit vorstellen; d.h.  $F(t)$  gibt den Punkt im Raum an, wo sich ein bestimmtes Objekt zum Zeitpunkt  $t$  aufhält. Wenn man die Zeit laufen lässt, beschreibt dieses Objekt eine bestimmte Kurve im Raum. Die explizite Form der Kurve betrachtet hingegen nur die Kurve, nicht aber etwa, in welche Richtung, mit welcher Geschwindigkeit und wie oft diese Kurve durchlaufen wird. An der expliziten Form kann man dafür besser ablesen, welche Punkte zur Kurve gehören.