Mathematik 1

für Maschinenbau, Material- und Fertigungstechnologie

Dipl.-Math. Rupert J. Hartung
Fachhochschule Gießen-Friedberg
WS 2005 / 06

Lösungen der Übung 7

Wichtige Vorbemerkung: Die vorgestellten Lösungen müssen nicht die einzig möglichen sein. Sie bilden nur ein Beispiel für einen richtigen Lösungsweg. Zum Teil sind die vorgestellten Lösungen ausführlicher, zum Teil knapper dargestellt als erwartet wird (s. Übung).

Aufgabe 25.

(a) Es seien Funktionen h_1, h_2 gegeben so dass

$$h_1'(x) \equiv h_2'(x) \tag{1}$$

(identische Ableitungen). Wir müssen zeigen, dass sich h_1 und h_2 nur um eine Konstante unterscheiden.

Betrachte dazu die Funktion

$$h(x) := h_1(x) - h_2(x).$$

Für diese gilt

$$h'(x) = h_1'(x) - h_2'(x) \equiv 0$$

wegen (1). Laut (8.13) folgt, dass h konstant ist, etwa $h(x) \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Das aber heißt (nach Definition von h)

$$c \equiv h(x) \equiv h_1(x) - h_2(x) \qquad \Longrightarrow \qquad h_1(x) \equiv h_2(x) + c.$$

Das war die Behauptung.

(b) Wir sollen nun (8.12b) als richtig annehmen und (8.12a) daraus folgern. Dazu setzen wir (gemäß Anleitung)

$$f(s) := \sin(s+t), \qquad g(s) := (\sin s)(\cos t) + (\cos s)(\sin t).$$

Hierbei sei t für die gesamte Teilaufgabe beliebig, aber fest. Der Anleitung folgend bilden wir die Ableitungen:

$$f'(s) := \cos(s+t), \qquad g'(s) := (\cos s)(\cos t) - (\sin s)(\sin t).$$

(Beachten Sie, dass t, und damit auch $\cos t$ und $\sin t$, als konstant beachtet werden.) Aus (8.12b) folgt aber genau, dass diese Ableitungen punktweise identisch sind, d.h. $f'(s) \equiv g'(s)$. Aus (8.13) folgt also, dass $f'(s) \equiv g'(s) + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\sin(s+t) = (\sin s)(\cos t) + (\cos s)(\sin t) + c \qquad \forall\, s. \tag{2}$$

Das c aber können wir berechnen, indem wir $s = 0$ einsetzen:

$$\begin{array}{rrl} \text{linke Seite:} & \sin(0+t) = & \sin t, \\ \text{rechte Seite:} & 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t + c = & \sin t + c. \end{array}$$

Wir haben also laut (2) $\sin t = \sin t + c$ und damit $c = 0$. Damit lautet (2)

$$\sin(s+t) = (\sin s)(\cos t) + (\cos s)(\sin t)$$

für alle s und für alle t (da t beliebig vorgegeben war); und das ist genau (8.12a).

(c)

$$\begin{aligned} F'(s) &= \left(\frac{d}{ds}\cos s\right)(\cos(x-s)) - (\sin s)\left(\frac{d}{ds}\sin(x-s)\right) \\ &= -(\sin s)(\cos(x-s)) - (\sin s)(\cos(x-s))(-1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Angewandt wurde zuerst die Produktregel, dann die Kettenregel auf den Ausdruck $\cos(x-s)$ mit innerer Funktion $x-s$ und innerer Ableitung -1.

(d)

$$F(0) = (\cos 0)(\cos(x-0)) - (\sin 0)(\sin(x-0)) = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x.$$

(e) Da laut Teil c) die $F'(s) \equiv 0$ ist, folgt daraus mit (8.13), dass F konstant ist. Da laut d) $F(0) = \cos x$ ist, folgt dass

$$F(s) \equiv \cos x$$

gilt (konstant, für alle s).

(f) Die gerade gewonnene Gleichheit $F(s) = \cos x$ für alle s bedeutet (wenn man die Definition von F einsetzt):

$$(\cos s)(\cos(x-s)) - (\sin s)(\sin(x-s)) = \cos x.$$

Man setze nun

$$x := s + t$$

in diese Gleichung ein; dann erhält man genau (8.12b).

Aufgabe 26.

(a) Die Periode von $y_2(t)$ ist 2π (bekannt), die von $y_1(t)$ ist π (denn die Periode von $\sin(\omega t)$ wie die von $\cos(\omega t)$ ist $\frac{2\pi}{\omega}$).

Die Periode der Summe $y_1(t) + y_2(t)$ ist nun die kleinste positive Zahl, für die eine Gleichung

$$n_1 \cdot 2\pi = n_2 \cdot \pi$$

mit natürlichen Zahlen n_1, n_2 gilt (hier gehen die eben berechneten Perioden ein). Durch Ausprobieren der ersten Werte $n_1 = 1, 2, 3, \ldots$; $n_2 = 1, 2, 3, \ldots$ erkennt man, dass die kleinste solche Zahl

$$1 \cdot 2\pi = 2 \cdot \pi$$

ist. Also hat $y(t)$ die Periode $t = 2\pi$.

(b) (i) Berechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2\cos(2t) + \cos t \\ y''(t) &= -4\sin(2t) - \sin t \\ y'''(t) &= -8\cos(2t) - \cos t. \end{aligned}$$

(ii) Bestimme die Nullstellen:

$$0 \overset{!}{=} \sin(2t) + \sin t \overset{(8.12a)}{=} 2(\sin t)(\cos t) + \sin t = (\sin t)(2(\cos t) + 1).$$

Damit der letzte Ausdruck 0 wird, muss einer der Faktoren 0 sein; also

$$\sin t = 0 \qquad \text{oder} \qquad 2(\cos t) + 1 = 0.$$

Die erste Gleichung gilt laut (8.4) genau dann, wenn $t = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Da in der Aufgabe nur nach $t \in [0, P = 2\pi]$ gefragt ist, bekommen wir hier also die Lösungen

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \pi \quad \text{und} \quad t_3 = 2\pi.$$

Die zweite Gleichung ist gleichwertig mit

$$\cos t = -\frac{1}{2}.$$

Aus der Betrachtung der Cosinus-Funktion folgt, dass es genau ein solches t in $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ gibt und genau eines in $]\pi, \frac{3}{2}\pi[$. Wir erhalten also zwei weitere Nullstellen

$$t_4 = \arccos(-\frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad t_5 = 2\pi - \arccos(-\frac{1}{2}).$$

Übrigens gilt

$$t_4 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad t_5 = \frac{4\pi}{3},$$

was hier nicht unbedingt erwartet wurde.

(iii) Extrema:

$$0 \overset{!}{=} 2\cos(2t) + \cos t \overset{(8.12b)}{=} 2(\cos^2 t - \sin^2 t) + \cos t$$

Zur Vereinfachung der Gleichung, in der sowohl sin also auch cos vorkommen, verwenden wir die Formel $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ und folgern

$$\Rightarrow \; 0 = 2(2\cos^2 t - 1) + \cos t = 4\cos^2 t - 2 + \cos t.$$

Substituieren wir $c := \cos t$, dann erhalten wir für c die quadratische Gleichung

$$0 = c^2 + \frac{c}{4} - \frac{1}{2}$$

mit den Lösungen

$$c = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

Dies führt zur Bedingung

$$\cos t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

für kritische Stellen von y; auf $[0, 2\pi]$ ist eine dieser Bedingung für genau vier Werte von t erfüllt, nämlich für

$$t_{6,7} = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \quad \text{und} \quad t_{8,9} = 2\pi \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

Diese Werte müssen jetzt in der zweiten Ableitung $-4\sin(2t) - \sin t$ getestet werden. Anstatt hier komplizierte Rechnungen zu beginnen, empfiehlt sich hier (ausnahmsweise) die Zuhilfenahme des Taschenrechners. Alternativ genügt es etwa für t_6 zu sehen, dass

$$\frac{1 + \sqrt{33}}{8} > 0;$$

denn hieraus folgt bereits, dass $0 < t_6 < \frac{\pi}{2}$, damit $2t_6 < \pi$ und hieraus wiederum $\sin(2t_6) > 0$ und $\sin t_6 > 0$. Zusammen ergibt sich $y''(t_6) < 0$, d.h. es liegt ein relatives Maximum vor.

Ähnlich sieht man ein, dass bei t_9 ein Maximum vorliegt. Daraus folgt sofort, dass sich bei t_7 ein Minimum befindet, und da $y(t)$ periodisch ist, muss auch t_8 ein Minimum sein.

(iv) Wendepunkte:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} y''(t) &= -4\sin(2t) - \sin t \stackrel{(8.12a)}{=} -8(\sin t)(\cos t) - \sin t \\ &= -(1 + 8\cos t)\sin t. \end{aligned}$$

Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\sin t = 0 \quad \text{und} \quad \cos t = -\frac{1}{8}.$$

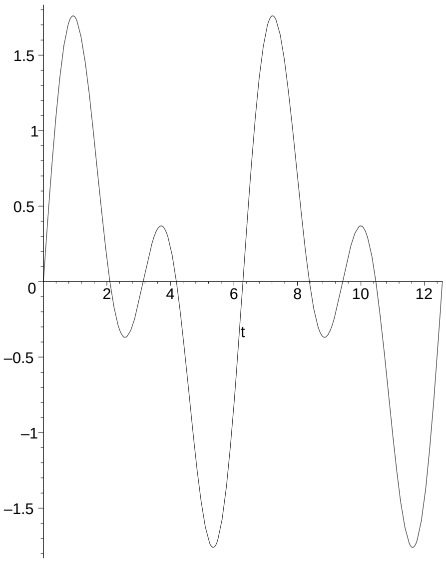
Die erste Gleichung hat auf $[0, 2\pi]$ genau die Lösungen

$$t_{10} = 0, \quad t_{11} = \pi, \quad t_{12} = 2\pi.$$

Die zweite hat wieder genau zwei Lösungen, nämlich

$$t_{13} = \arccos(-\frac{1}{8}) \quad \text{und} \quad t_{14} = 2\pi - \arccos(-\frac{1}{8}).$$

Man kann nun (wie eben) nachprüfen, dass $y'''(t_i) \neq 0$ für $i = 10, \ldots, 14$. Folglich sind diese Stellen Wendepunkte.

(c) 

Aufgabe 27.

(a) Die Funktionen $x(t), y(t)$ haben beide die Periode $\frac{\pi}{\omega}$. Folglich hat $r(t)$ ebenfalls die Periode $\frac{\pi}{\omega}$.

(b) Da $\sin^2$ und cos^2 nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen, bleibt der x-Wert stets zwischen 0 und a und der y-Wert stets zwischen 0 und b. Genauer erhält die (gerade) Strecke von $(0, b)$ nach $(a, 0)$, wie wir jetzt nachweisen.

Um $y(t)$ als Funktion von x darzustellen, bietet sich der Satz von Pythagoras an: $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$, also

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1.$$

Daraus ergibt sich sofort die Gleichung

$$y(x) = -\frac{b}{a}(x - a),$$

was zunächst eine Gerade beschreibt. Da aber, wie oben bemerkt, x nur Werte zwischen 0 und a annimmt, ist das Bild der Funktion r genau die Strecke

$$y(x) = -\frac{b}{a}(x - a), \qquad 0 \leq x \leq a.$$

(c) Geschwindigkeit:

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 2a\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ -2b\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Mit dem Additionstheorem für den Sinus vereinfacht sich dies zu

$$r'(t) = \omega \sin(2\omega t) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

Geschwindigkeitsbetrag:

$$|r'(t)| = \sqrt{\omega^2 \sin^2(2\omega t)(a^2 + b^2)} = |\omega| \cdot |\sin(2\omega t)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Beschleunigung:

$$r''(t) = 2\omega^2 \cos(2\omega t) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

Beschleunigungsbetrag:

$$|r''(t)| = 2\omega^2 |\cos(2\omega t)| \sqrt{a^2 + b^2}.$$