Mathematik 1
für Maschinenbau, Mechatronik, Material- und Fertigungstechnologie

Dipl.-Math. Rupert J. Hartung
Fachhochschule Gießen-Friedberg
WS 2005/06

Hilfe zur Klausur

Pascalsches Dreieck.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

z.B. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Differentiation. Produktregel: $\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Quotientenregel: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\Big(g(x)\Big)^2}$.

Kettenregel: $\frac{d}{dx}f(u(x)) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Ableitungen und Stammfunktionen.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
x^w	wx^{w-1}	$\frac{x^{w+1}}{w+1} + C \quad (w \neq -1)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$

Integrationsregeln.
Substitutionsregel: $\int f(u(x))dx = \int f(u)\frac{dx}{du}du$.
Spezielle Substitutionen:
$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$ wo $F(u) = \int f(u)du$
$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$
Partielle Integration: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Trigonometrische Funktionen. Wichtige Werte:

$$\begin{array}{cccccc} \sin 0 = 0 & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin \frac{\pi}{2} = 1 & \sin \pi = 0 & \sin \frac{3}{2}\pi = -1 & \sin(2\pi) = 0 \\ \cos 0 = 1 & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \cos \pi = -1 & \cos \frac{3}{2}\pi = 0 & \cos(2\pi) = 1 \end{array}$$

Beziehung zwischen Sinus und Cosinus: $\sin t = \cos(t - \frac{\pi}{2})$
Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
Addtitionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(s+t) &= (\sin s)(\cos t) + (\sin t)(\cos s), \\ \cos(s+t) &= (\cos s)(\cos t) - (\sin s)(\sin t) \end{aligned}$$

Exponentialfunktion und Logarithmus. Rechenregeln:

$$\begin{array}{rl} \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), & \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} \\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) & \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \\ \exp(x)^a = \exp(xa) & \ln(x^a) = a \ln x \end{array}$$

Werte: $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = \mathrm{e}$, $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$

Formeln aus der Geometrie. Definition Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Betrag des Vektorproduktes: $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}| \sin\varphi$
Betrag des Skalarproduktes: $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}| \cos\varphi$
... wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der zwischen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ eingeschlossene Winkel ist.

Winkel zwischen zwei Vektoren: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}\right)$

Projektion des Vektors $\overrightarrow{b}$ auf den Vektor $\overrightarrow{a}$: $\dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}\overrightarrow{a}$
Abstand des Punktes mit Ortsvektor $\overrightarrow{q}$ zur Gerade mit PRF $\overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{p} + t\overrightarrow{a}$:

$$d = \frac{|\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p})}{|\overrightarrow{a}|}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden mit PRFen $\overrightarrow{g_i}(t) = \overrightarrow{p_i} + t\overrightarrow{a_i}$ $(i = 1, 2)$:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2})|}{|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}|}$$